

FURTHER THEOREMS OF PROPOSITIONAL CALCULUS

MICHAEL MEYLING

ABSTRACT. This module includes proofs of propositional calculus theorems. The following theorems and proofs are adapted from D. Hilbert and W. Ackermann's 'Grundzuege der theoretischen Logik' (Berlin 1928, Springer)

CONTENTS

module specification	1 43
--------------------------------------	---------

MODULE SPECIFICATION

Author of this module:

Michael Meyling

michael@meyling.com

This module has the following specification:

Name: prophilbert3
Version: 1.00.00
Rule version: 1.00.00
Origin: http://www.meyling.com/principia/0_00_51/prophilbert3_1.00.00_1.00.00.qedeq

The following modules were used:

Name: prophilbert2
Version: 1.00.00
Rule version: 1.00.00
Origin: [prophilbert2_1.00.00_1.00.00.qedeq](#)
pdf: [prophilbert2_1.00.00_1.00.00.pdf](#)

Is used by the following modules:

Name: predtheo2
Version: 1.00.00
Rule version: 1.02.00
Origin: [predtheo2_1.00.00_1.02.00.qedeq](#)
pdf: [predtheo2_1.00.00_1.02.00.pdf](#)

First distributive law (first direction):

Theorem 0.1.

$$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$$

Proof.

1	$((P \wedge Q) \Rightarrow P)$	add sentence hilb24
2	$((P \wedge A) \Rightarrow P)$	replace Q by A in 1
3	$((B \wedge A) \Rightarrow B)$	replace P by B in 2
4	$((Q \wedge A) \Rightarrow Q)$	replace B by Q in 3
5	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
6	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 5
7	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 6
8	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 7
9	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee C)))$	replace B by P in 8
10	$((D \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee Q)))$	replace C by Q in 9
11	$((Q \wedge A) \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee Q))$	replace D by $(Q \wedge A)$ in 10
12	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee Q))$	MP with 4, 11
13	$((P \wedge Q) \Rightarrow Q)$	add sentence hilb25
14	$((P \wedge A) \Rightarrow A)$	replace Q by A in 13
15	$((B \wedge A) \Rightarrow A)$	replace P by B in 14
16	$((Q \wedge A) \Rightarrow A)$	replace B by Q in 15
17	$((D \Rightarrow A) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee A)))$	replace C by A in 9
18	$((Q \wedge A) \Rightarrow A) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee A))$	replace D by $(Q \wedge A)$ in 17
19	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee A))$	MP with 16, 18
20	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$	add sentence hilb28
21	$(P \Rightarrow (A \Rightarrow (P \wedge A)))$	replace Q by A in 20
22	$(B \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge A)))$	replace P by B in 21
23	$(B \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (B \wedge (P \vee A))))$	replace A by $(P \vee A)$ in 22
24	$((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 23
25	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q)))$	add sentence hilb1
26	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q)))$	replace A by B in 25
27	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace Q by C in 26
28	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace P by D in 27
29	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 28
30	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))$	replace C by $((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 29
31	$((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $(P \vee Q)$ in 30
32	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 24, 31
33	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 12, 32
34	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow A)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow A)))$	add sentence hilb16
35	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow B)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow B)))$	replace A by B in 34
36	$((P \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (P \Rightarrow B)))$	replace Q by C in 35
37	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow B)))$	replace P by D in 36
38	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace B by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 37

39	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (D \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $(P \vee A)$ in 38
40	$((((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 39
41	$((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 33, 40
42	$((D \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow (((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 29
43	$((((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow (((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $(P \vee A)$ in 42
44	$((((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 41, 43
45	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 19, 44
46	$((P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence hilb33
47	$((P \Rightarrow (P \Rightarrow A)) \Rightarrow (P \Rightarrow A))$	replace Q by A in 46
48	$((B \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$	replace P by B in 47
49	$((B \Rightarrow (B \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow (B \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace A by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 48
50	$((((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 49
51	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 45, 50

□

First distributive law (second direction):

Theorem 0.2.

$$(((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$$

Proof.

1	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \wedge Q)))$	add sentence hilb28
2	$(P \Rightarrow (A \Rightarrow (P \wedge A)))$	replace Q by A in 1
3	$(B \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge A)))$	replace P by B in 2
4	$(Q \Rightarrow (A \Rightarrow (Q \wedge A)))$	replace B by Q in 3
5	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
6	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 5
7	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 6
8	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 7
9	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee C)))$	replace B by P in 8
10	$((D \Rightarrow (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(Q \wedge A)$ in 9
11	$((A \Rightarrow (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by A in 10
12	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q)))$	add sentence hilb1
13	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q)))$	replace A by B in 12
14	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace Q by C in 13
15	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace P by D in 14
16	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((Q \Rightarrow D) \Rightarrow (Q \Rightarrow C)))$	replace B by Q in 15
17	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((Q \Rightarrow D) \Rightarrow (Q \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$ in 16

18	$((A \Rightarrow (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow$ $((Q \Rightarrow (A \Rightarrow (Q \wedge A))) \Rightarrow (Q \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow$ $(P \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by $(A \Rightarrow (Q \wedge A))$ in 17
19	$((Q \Rightarrow (A \Rightarrow (Q \wedge A))) \Rightarrow (Q \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow$ $(P \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 11, 18
20	$(Q \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 4, 19
21	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow A)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow A)))$	add sentence <code>hilb16</code>
22	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow B)) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \Rightarrow B)))$	replace A by B in 21
23	$((P \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (P \Rightarrow B)))$	replace Q by C in 22
24	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow B)))$	replace P by D in 23
25	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow$ $(P \vee (Q \wedge A))))))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 24
26	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow$ $(D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $(P \vee A)$ in 25
27	$((Q \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow$ $(Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by Q in 26
28	$((P \vee A) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 20, 27
29	$((D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee (P \vee$ $(Q \wedge A))))))$	replace C by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 9
30	$((Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee$ $(Q \wedge A))))))$	replace D by Q in 29
31	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow C)))$	replace B by $(P \vee A)$ in 15
32	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow$ $((P \vee A) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow$ $(P \vee (P \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee$ $(P \vee (Q \wedge A)))$ in 31
33	$((Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee$ $(Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow$ $((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by $(Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$ in 32
34	$((P \vee A) \Rightarrow (Q \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow$ $((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 30, 33
35	$((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 28, 34
36	$((P \vee (Q \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee A))$	add sentence <code>hilb14</code>
37	$((P \vee (Q \vee B)) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee B))$	replace A by B in 36
38	$((P \vee (C \vee B)) \Rightarrow ((P \vee C) \vee B))$	replace Q by C in 37
39	$((D \vee (C \vee B)) \Rightarrow ((D \vee C) \vee B))$	replace P by D in 38
40	$((D \vee (C \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((D \vee C) \vee (Q \wedge A)))$	replace B by $(Q \wedge A)$ in 39
41	$((D \vee (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((D \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	replace C by P in 40
42	$((P \vee (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	replace D by P in 41
43	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q))$	add sentence <code>defimp1</code>
44	$((\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence <code>defimp2</code>
45	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee C)))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 8
46	$((D \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))$ in 45
47	$((P \vee (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by $(P \vee (P \vee (Q \wedge A)))$ in 46
48	$((\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	MP with 42, 47
49	$((P \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg P \vee B))$	replace Q by B in 43
50	$((C \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \vee B))$	replace P by C in 49
51	$((C \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg C \vee (P \vee (P \vee$ $(Q \wedge A))))))$	replace B by $(P \vee (P \vee (Q \wedge A)))$ in 50

52	$((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 51
53	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$ in 15
54	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 53
55	$((\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$ in 54
56	$((((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	MP with 48, 55
57	$((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	MP with 52, 56
58	$(\neg P \vee B) \Rightarrow (P \Rightarrow B)$	replace Q by B in 44
59	$(\neg C \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	replace P by C in 58
60	$(\neg C \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (C \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	replace B by $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))$ in 59
61	$(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 60
62	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 53
63	$((\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 62
64	$((((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	MP with 61, 63
65	$((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	MP with 57, 64
66	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee C)))$	replace B by $\neg(P \vee A)$ in 8
67	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 66
68	$((((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$ in 67
69	$(\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$	MP with 65, 68
70	$((C \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg C \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$ in 50
71	$((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee A)$ in 70

72	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))$ in 15
73	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $(\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$ in 72
74	$((\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))$ in 73
75	$((((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 69, 74
76	$((((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 71, 75
77	$((\neg C \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (C \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 59
78	$((\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $(P \vee A)$ in 77
79	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace C by $((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$ in 72
80	$((\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))$ in 79
81	$((((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 78, 80
82	$((((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (P \vee (Q \wedge A)))))) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))))))$	MP with 76, 81
83	$((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	MP with 35, 82
84	$((P \vee P) \Rightarrow P)$	add sentence hilb11
85	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee D) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee C)))$	replace B by $(Q \wedge A)$ in 8
86	$((D \Rightarrow P) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee D) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee P)))$	replace C by P in 85
87	$((P \vee P) \Rightarrow P) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee P))$	replace D by $(P \vee P)$ in 86
88	$((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee P)$	MP with 84, 87
89	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$	add axiom axiom3
90	$((P \vee B) \Rightarrow (B \vee P))$	replace Q by B in 89
91	$((C \vee B) \Rightarrow (B \vee C))$	replace P by C in 90
92	$((C \vee P) \Rightarrow (P \vee C))$	replace B by P in 91

93	$((Q \wedge A) \vee P) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))$	replace C by $(Q \wedge A)$ in 92
94	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow C))$	replace B by $((Q \wedge A) \vee (P \vee P))$ in 15
95	$((D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow$ $D) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 94
96	$((((Q \wedge A) \vee P) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee$ $(P \vee P)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee P)) \Rightarrow (((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow$ $(P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $((Q \wedge A) \vee P)$ in 95
97	$((((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee P)) \Rightarrow$ $((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 93, 96
98	$((Q \wedge A) \vee (P \vee P) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 88, 97
99	$((C \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee C))$	replace B by $(Q \wedge A)$ in 91
100	$((P \vee P) \vee (Q \wedge A) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee (P \vee P)))$	replace C by $(P \vee P)$ in 99
101	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))$ in 15
102	$((D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow$ $D) \Rightarrow (((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 101
103	$((((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee (P \vee P)) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $((Q \wedge A) \vee (P \vee P))$ in 102
104	$((((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((Q \wedge A) \vee (P \vee P))) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 98, 103
105	$((P \vee P) \vee (Q \wedge A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 100, 104
106	$((D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 45
107	$((((P \vee P) \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $(P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))$ in 106
108	$((\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $(P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 105, 107
109	$((C \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg C \vee ((P \vee P) \vee$ $(Q \wedge A))))$	replace B by $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))$ in 50
110	$((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 109
111	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 15
112	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A)))$ in 111
113	$((\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee$ $(Q \wedge A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))$ in 112
114	$((((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow$ $((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 108, 113
115	$((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee$ $(P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 110, 114
116	$((\neg C \vee (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (C \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 59
117	$((\neg(P \vee Q) \vee (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow$ $(P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 116

135	$\begin{aligned} & (((\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$ in 134
136	$\begin{aligned} & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (\neg(P \vee A) \vee ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	MP with 133, 135
137	$\begin{aligned} & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee P) \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	MP with 131, 136
138	$((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 83, 137
139	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (D \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 25
140	$\begin{aligned} & (((P \vee A) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(P \vee A)$ in 139
141	$((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	MP with 138, 140
142	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow A)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow A))$	add sentence hilb29
143	$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow B)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow B))$	replace A by B in 142
144	$((P \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((P \wedge C) \Rightarrow B))$	replace Q by C in 143
145	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((D \wedge C) \Rightarrow B))$	replace P by D in 144
146	$((D \Rightarrow (C \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((D \wedge C) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 145
147	$((D \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow ((D \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee A)$ in 146
148	$\begin{aligned} & (((P \vee Q) \Rightarrow ((P \vee A) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))) \end{aligned}$	replace D by $(P \vee Q)$ in 147
149	$(((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 141, 148

□

A form for the abbreviation rule form for disjunction (first direction):

Theorem 0.3.

$$((P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$$

Proof.

1	$(P \Rightarrow \neg\neg P)$	add sentence hilb5
2	$(A \Rightarrow \neg\neg A)$	replace P by A in 1
3	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 2
4	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q))$	add sentence defimpl1
5	$((\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence defimpl2
6	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg P \vee A))$	replace Q by A in 4
7	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg B \vee A))$	replace P by B in 6
8	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q)))$	add sentence hilb1
9	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q)))$	replace A by B in 8
10	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace Q by C in 9
11	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace P by D in 10
12	$((\neg P \vee A) \Rightarrow (P \Rightarrow A))$	replace Q by A in 5
13	$((\neg B \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$	replace P by B in 12

14	$(Q \Rightarrow \neg\neg Q)$	replace P by Q in 1
15	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
16	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 15
17	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 16
18	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 17
19	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((Q \vee D) \Rightarrow (Q \vee C)))$	replace B by Q in 18
20	$((D \Rightarrow \neg\neg P) \Rightarrow ((Q \vee D) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)))$	replace C by $\neg\neg P$ in 19
21	$((P \Rightarrow \neg\neg P) \Rightarrow ((Q \vee P) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)))$	replace D by P in 20
22	$((Q \vee P) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P))$	MP with 1, 21
23	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$	add axiom axiom3
24	$((P \vee A) \Rightarrow (A \vee P))$	replace Q by A in 23
25	$((B \vee A) \Rightarrow (A \vee B))$	replace P by B in 24
26	$((B \vee \neg\neg P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee B))$	replace A by $\neg\neg P$ in 25
27	$((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	replace B by Q in 26
28	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((Q \vee P) \Rightarrow D) \Rightarrow ((Q \vee P) \Rightarrow C)))$	replace B by $(Q \vee P)$ in 11
29	$((D \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (((Q \vee P) \Rightarrow D) \Rightarrow ((Q \vee P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))))$	replace C by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 28
30	$((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (((Q \vee P) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \Rightarrow ((Q \vee P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace D by $(Q \vee \neg\neg P)$ in 29
31	$((Q \vee P) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \Rightarrow ((Q \vee P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 27, 30
32	$((Q \vee P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 22, 31
33	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow C)))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 11
34	$((D \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))))$	replace C by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 33
35	$((Q \vee P) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace D by $(Q \vee P)$ in 34
36	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 32, 35
37	$((P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 23, 36
38	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$	add sentence hilb7
39	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P))$	replace Q by A in 38
40	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$	replace P by B in 39
41	$((B \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 40
42	$((P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 41
43	$(\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q))$	MP with 37, 42
44	$((B \Rightarrow \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg(P \vee Q)$ in 40
45	$((\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace B by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 44
46	$(\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$	MP with 43, 45
47	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee C)))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 18
48	$((D \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 47
49	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 48
50	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	MP with 46, 49
51	$((B \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg B \vee \neg\neg(P \vee Q)))$	replace A by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 7
52	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 51
53	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q))$ in 11

54	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$ in 53
55	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q))$ in 54
56	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	MP with 50, 55
57	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	MP with 52, 56
58	$((\neg B \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace A by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 13
59	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 58
60	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace C by $((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$ in 53
61	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$ in 60
62	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))))$	MP with 59, 61
63	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	MP with 57, 62
64	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$	MP with 3, 63
65	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg\neg P \vee C)))$	replace B by $\neg\neg P$ in 18
66	$((D \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace C by $\neg\neg Q$ in 65
67	$((Q \Rightarrow \neg\neg Q) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace D by Q in 66
68	$((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 14, 67
69	$((B \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 40
70	$((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace B by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 69
71	$(\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q))$	MP with 68, 70
72	$((B \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 40
73	$((\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace B by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 72
74	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 71, 73
75	$((D \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 47
76	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 75
77	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	MP with 74, 76
78	$((B \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg B \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace A by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 7
79	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 78
80	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$ in 11

81	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$ in 80
82	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$ in 81
83	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	MP with 77, 82
84	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	MP with 79, 83
85	$((\neg B \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace A by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 13
86	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 85
87	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$ in 80
88	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$ in 87
89	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	MP with 86, 88
90	$((((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))) \Rightarrow (((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	MP with 84, 89
91	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 64, 90
92	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	reverse abbreviation and in 91 at occurrence 1

□

A form for the abbreviation rule form for disjunction (second direction):

Theorem 0.4.

$$(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$$

Proof.

1	$(\neg\neg P \Rightarrow P)$	add sentence hilb6
2	$(\neg\neg A \Rightarrow A)$	replace P by A in 1
3	$(\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 2
4	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q))$	add sentence defimpl1
5	$((\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence defimpl2
6	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$	add axiom axiom3
7	$((P \vee A) \Rightarrow (A \vee P))$	replace Q by A in 6
8	$((B \vee A) \Rightarrow (A \vee B))$	replace P by B in 7
9	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q)))$	add sentence hilb1
10	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q)))$	replace A by B in 9
11	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace Q by C in 10

12	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace P by D in 11
13	$((B \vee (P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee B))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 8
14	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg P \vee A))$	replace Q by A in 4
15	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg B \vee A))$	replace P by B in 14
16	$((B \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg B \vee (P \vee Q)))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 15
17	$((\neg P \vee A) \Rightarrow (P \Rightarrow A))$	replace Q by A in 5
18	$((\neg B \vee A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$	replace P by B in 17
19	$((\neg B \vee (P \vee Q)) \Rightarrow (B \Rightarrow (P \vee Q)))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 18
20	$(\neg\neg Q \Rightarrow Q)$	replace P by Q in 1
21	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
22	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 21
23	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 22
24	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 23
25	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((Q \vee D) \Rightarrow (Q \vee C)))$	replace B by Q in 24
26	$((D \Rightarrow P) \Rightarrow ((Q \vee D) \Rightarrow (Q \vee P)))$	replace C by P in 25
27	$((\neg\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (Q \vee P)))$	replace D by $\neg\neg P$ in 26
28	$((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (Q \vee P))$	MP with 1, 27
29	$((B \vee P) \Rightarrow (P \vee B))$	replace A by P in 8
30	$((Q \vee P) \Rightarrow (P \vee Q))$	replace B by Q in 29
31	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow D) \Rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow C)))$	replace B by $(Q \vee \neg\neg P)$ in 12
32	$((D \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow D) \Rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 31
33	$((((Q \vee P) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (Q \vee P)) \Rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace D by $(Q \vee P)$ in 32
34	$((((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (Q \vee P)) \Rightarrow ((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (P \vee Q)))$	MP with 30, 33
35	$((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (P \vee Q))$	MP with 28, 34
36	$((B \vee Q) \Rightarrow (Q \vee B))$	replace A by Q in 8
37	$((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P))$	replace B by $\neg\neg P$ in 36
38	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 12
39	$((D \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 38
40	$((((Q \vee \neg\neg P) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace D by $(Q \vee \neg\neg P)$ in 39
41	$((((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee \neg\neg P)) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)))$	MP with 35, 40
42	$((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	MP with 37, 41
43	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$	add sentence hilb7
44	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P))$	replace Q by A in 43
45	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$	replace P by B in 44
46	$((B \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 45
47	$((((\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace B by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 46
48	$(\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q))$	MP with 42, 47
49	$((B \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 45
50	$((\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 49
51	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q))$	MP with 48, 50
52	$((B \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 45
53	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 52

76	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)))$	MP with 71, 75
77	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)))$	MP with 72, 76
78	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)))$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 19
79	$((D \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace C by $(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))$ in 73
80	$((\neg\neg(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))))$	replace D by $(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q))$ in 79
81	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)))$	MP with 78, 80
82	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)))$	MP with 77, 81
83	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	MP with 3, 82
84	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg\neg P \vee C)))$	replace B by $\neg\neg P$ in 24
85	$((D \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace C by Q in 84
86	$((\neg\neg Q \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)))$	replace D by $\neg\neg Q$ in 85
87	$((\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q))$	MP with 20, 86
88	$((B \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(\neg\neg P \vee Q)$ in 45
89	$((\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	replace B by $(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 88
90	$(\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 87, 89
91	$((B \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 45
92	$((\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)))$	replace B by $\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 91
93	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$	MP with 90, 92
94	$((B \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 45
95	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	replace B by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 94
96	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))$	MP with 93, 95
97	$((D \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (((P \vee Q) \vee D) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace C by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 55
98	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (((P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q))))$	replace D by $\neg\neg(\neg\neg P \vee Q)$ in 97
99	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow ((P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)))$	MP with 96, 98
100	$((B \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee B))$	replace A by $\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$ in 8
101	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 100
102	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q)) \Rightarrow C))))$	replace B by $((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee Q))$ in 12
103	$((D \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee (P \vee Q))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee (P \vee Q))))$	replace C by $(\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee (P \vee Q))$ in 102

122	$(((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \vee (P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))))$	MP with 119, 121
123	$((\neg\neg(\neg\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)))$	MP with 118, 122
124	$(\neg\neg(\neg\neg P \vee \neg\neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	MP with 83, 123
125	$(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	reverse abbreviation and in 124 at occurrence 1

□

By duality we get the second distributive law (first direction):

Theorem 0.5.

$$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)))$$

Proof.

1	$(((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	add sentence hilb37
2	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$	add sentence hilb7
3	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P))$	replace Q by A in 2
4	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$	replace P by B in 3
5	$((B \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 4
6	$(((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace B by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 5
7	$(\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 1, 6
8	$(P \Rightarrow \neg\neg P)$	add sentence hilb5
9	$(B \Rightarrow \neg\neg B)$	replace P by B in 8
10	$((Q \wedge A) \Rightarrow \neg\neg(Q \wedge A))$	replace B by $(Q \wedge A)$ in 9
11	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
12	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 11
13	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 12
14	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 13
15	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee C)))$	replace B by P in 14
16	$((D \Rightarrow \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	replace C by $\neg\neg(Q \wedge A)$ in 15
17	$(((Q \wedge A) \Rightarrow \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	replace D by $(Q \wedge A)$ in 16
18	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 10, 17
19	$((P \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg P))$	replace Q by B in 2
20	$((C \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C))$	replace P by C in 19
21	$((C \Rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 20
22	$(((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 21
23	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 18, 22
24	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q))$	add sentence defimp11
25	$((\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence defimp12
26	$((C \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in 20
27	$((\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 26
28	$(\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 23, 27

29	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee D) \Rightarrow$	replace B by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee C)))$	in 14
30	$((D \Rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$	replace C by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$
	$A)) \vee D) \Rightarrow (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee$	in 29
	$\neg\neg(Q \wedge A))))$	
31	$((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$	replace D by $\neg\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in
	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	30
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	
32	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	MP with 28, 31
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	
33	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$	add axiom axiom3
34	$((P \vee B) \Rightarrow (B \vee P))$	replace Q by B in 33
35	$((C \vee B) \Rightarrow (B \vee C))$	replace P by C in 34
36	$((C \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge$	replace B by $\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$
	$A)) \vee C))$	in 35
37	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$	replace C by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	in 36
38	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q)))$	add sentence hilb1
39	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q)))$	replace A by B in 38
40	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace Q by C in 39
41	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C)))$	replace P by D in 40
42	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee$	replace B by $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$
	$(Q \wedge A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee$	$A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A)))$ in 41
	$\neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow C)))$	
43	$((D \Rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$	replace C by $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge$
	$A))) \Rightarrow (((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	$A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$
	$D) \Rightarrow ((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	in 42
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	
44	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$	replace D by $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$	$A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$ in
	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	43
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$	
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	
45	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	MP with 37, 44
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$	
	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	
46	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$	MP with 32, 45
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	
47	$((C \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$	replace B by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$
	$A)) \vee C))$	in 35
48	$((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$	replace C by $\neg\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in
	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))))$	47
49	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge$	replace B by $(\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee$
	$(P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee$	$\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 41
	$Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow C)))$	
50	$((D \Rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee$	replace C by $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge$
	$A))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$	$A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$
	$D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$	in 49
	$(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	

51	$\begin{aligned} & (((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A)))$ in 50
52	$\begin{aligned} & (((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg\neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))) \end{aligned}$	MP with 46, 51
53	$\begin{aligned} & ((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \end{aligned}$	MP with 48, 52
54	$(P \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg P \vee B)$	replace Q by B in 24
55	$(C \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \vee B)$	replace P by C in 54
56	$(C \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg C \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 55
57	$\begin{aligned} & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \end{aligned}$	replace C by $\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in 56
58	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow \\ & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow C))) \end{aligned}$	replace B by $(\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 41
59	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow \\ & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))) \end{aligned}$	replace C by $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 58
60	$\begin{aligned} & (((\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow \\ & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 59
61	$\begin{aligned} & (((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee (Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow \\ & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \end{aligned}$	MP with 53, 60
62	$\begin{aligned} & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \end{aligned}$	MP with 57, 61
63	$(\neg P \vee B) \Rightarrow (P \Rightarrow B)$	replace Q by B in 25
64	$(\neg C \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	replace P by C in 63
65	$(\neg C \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 64
66	$\begin{aligned} & ((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \end{aligned}$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 65
67	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow (\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow \\ & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow \\ & (\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))))) \end{aligned}$	replace C by $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 58

68	$((\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))))$	replace D by $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$ in 67
69	$((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))))$	MP with 66, 68
70	$((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	MP with 62, 69
71	$(\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 7, 70
72	$(\neg\neg P \Rightarrow P)$	add sentence hilb6
73	$(\neg\neg A \Rightarrow A)$	replace P by A in 72
74	$(\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 73
75	$((P \wedge Q) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q))$	add sentence defand1
76	$(\neg(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \wedge Q))$	add sentence defand2
77	$((B \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 4
78	$((\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \Rightarrow$ $\neg\neg(P \vee Q)))$	replace B by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 77
79	$(\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee Q))$	MP with 74, 78
80	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee C)))$	replace B by $\neg(P \vee A)$ in 14
81	$((D \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))))$	replace C by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 80
82	$((\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee$ $Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))))$	replace D by $\neg(P \vee Q)$ in 81
83	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)))$	MP with 79, 82
84	$((C \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee C))$	replace B by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 35
85	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee$ $A)))$	replace C by $\neg(P \vee A)$ in 84
86	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))$ in 41
87	$((D \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee A) \vee$ $\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow$ $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 86
88	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee$ $A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow$ $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))$ in 87
89	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee$ $Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A))))$	MP with 85, 88
90	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 83, 89
91	$((C \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee C))$	replace B by $\neg(P \vee A)$ in 35
92	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)))$	replace C by $\neg(P \vee Q)$ in 91
93	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 41
94	$((D \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow$ $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 93

95	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))$ in 94
96	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 90, 95
97	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 92, 96
98	$((C \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 20
99	$((\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 98
100	$(\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 97, 99
101	$((P \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg B))$	replace Q by B in 75
102	$((C \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg B))$	replace P by C in 101
103	$((C \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg(P \vee A)))$	replace B by $(P \vee A)$ in 102
104	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 103
105	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 41
106	$((D \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 105
107	$((\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 106
108	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 100, 107
109	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 104, 108
110	$(\neg(\neg P \vee \neg B) \Rightarrow (P \wedge B))$	replace Q by B in 76
111	$(\neg(\neg C \vee \neg B) \Rightarrow (C \wedge B))$	replace P by C in 110
112	$(\neg(\neg C \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (C \wedge (P \vee A)))$	replace B by $(P \vee A)$ in 111
113	$(\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 112
114	$((D \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 105
115	$((\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 114
116	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 113, 115
117	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 109, 116
118	$((C \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 20
119	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 118
120	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 117, 119
121	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \vee C)))$	replace B by $\neg\neg\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 14

138	$(\neg\neg B \Rightarrow B)$	replace P by B in 72
139	$(\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow (P \vee A))$	replace B by $(P \vee A)$ in 138
140	$((C \Rightarrow (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(P \vee A)$ in 20
141	$((\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg\neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee A)$ in 140
142	$(\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee A))$	MP with 139, 141
143	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee C)))$	replace B by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 14
144	$((D \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg\neg\neg(P \vee A)$ in 143
145	$((\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))))$	replace D by $\neg(P \vee A)$ in 144
146	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)))$	MP with 142, 145
147	$((C \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))$ in 20
148	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 147
149	$(\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 146, 148
150	$((C \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg\neg\neg(P \vee A)))$	replace B by $\neg\neg(P \vee A)$ in 102
151	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 150
152	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A))$ in 41
153	$((D \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 152
154	$((\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))$ in 153
155	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 149, 154
156	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 151, 155
157	$(\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 112
158	$((D \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 152
159	$((\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 158
160	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 157, 159
161	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 156, 160
162	$((C \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 20

178	$((\neg(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A))) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))))$	replace D by $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$ in 177
179	$((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))))$	MP with 176, 178
180	$((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))$	MP with 174, 179
181	$(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$	MP with 137, 180
182	$(\neg(P \vee \neg(Q \wedge B)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee B)))$	replace A by B in 181
183	$(\neg(P \vee \neg(C \wedge B)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee C) \wedge \neg(P \vee B)))$	replace Q by C in 182
184	$(\neg(D \vee \neg(C \wedge B)) \Rightarrow \neg(\neg(D \vee C) \wedge \neg(D \vee B)))$	replace P by D in 183
185	$(\neg(D \vee \neg(C \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg(D \vee C) \wedge \neg(D \vee \neg A)))$	replace B by $\neg A$ in 184
186	$(\neg(D \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg(D \vee \neg Q) \wedge \neg(D \vee \neg A)))$	replace C by $\neg Q$ in 185
187	$(\neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)))$	replace D by $\neg P$ in 186
188	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)))$	reverse abbreviation and in 187 at occurrence 1
189	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	add sentence hilb38
190	$((P \vee B) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg B))$	replace Q by B in 189
191	$((C \vee B) \Rightarrow \neg(\neg C \wedge \neg B))$	replace P by C in 190
192	$((C \vee A) \Rightarrow \neg(\neg C \wedge \neg A))$	replace B by A in 191
193	$((Q \vee A) \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A))$	replace C by Q in 192
194	$((C \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg(\neg Q \wedge \neg A)$ in 20
195	$((Q \vee A) \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(Q \vee A))$	replace C by $(Q \vee A)$ in 194
196	$(\neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(Q \vee A))$	MP with 193, 195
197	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg P \vee C)))$	replace B by $\neg P$ in 14
198	$((D \Rightarrow \neg(Q \vee A)) \Rightarrow ((\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \vee A))))$	replace C by $\neg(Q \vee A)$ in 197
199	$((\neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(Q \vee A)) \Rightarrow ((\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 198
200	$((\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 196, 199
201	$((C \Rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg P \vee \neg(Q \vee A))$ in 20
202	$((\neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace C by $(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 201
203	$(\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	MP with 200, 202
204	$((C \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg(Q \vee A)))$	replace B by $(Q \vee A)$ in 102
205	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	replace C by P in 204
206	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(P \wedge (Q \vee A))$ in 41
207	$((D \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow (((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace C by $\neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 206
208	$((\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow$ $((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))$ in 207

209	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 203, 208
210	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 205, 209
211	$(\neg(\neg C \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (C \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace B by $\neg(\neg Q \wedge \neg A)$ in 111
212	$(\neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace C by P in 211
213	$((D \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace C by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 206
214	$((\neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace D by $\neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 213
215	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow ((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 212, 214
216	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 210, 215
217	$((C \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 20
218	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(P \wedge (Q \vee A)))$	replace C by $(P \wedge (Q \vee A))$ in 217
219	$(\neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(P \wedge (Q \vee A)))$	MP with 216, 218
220	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee D) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee C)))$	replace B by $\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)$ in 14
221	$((D \Rightarrow \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee D) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))))$	replace C by $\neg(P \wedge (Q \vee A))$ in 220
222	$((\neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))))$	replace D by $\neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 221
223	$((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A)))$	MP with 219, 222
224	$((C \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee C))$	replace B by $\neg(P \wedge (Q \vee A))$ in 35
225	$((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)))$	replace C by $\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)$ in 224
226	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 41
227	$((D \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A))) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A))))$	replace C by $(\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A))$ in 226
228	$((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A))) \Rightarrow (((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow ((\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(P \wedge (Q \vee A)) \vee \neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A))))$	replace D by $(\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q)) \wedge \neg(\neg P \vee \neg A)) \vee \neg(P \wedge (Q \vee A))$ in 227

272	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg\neg(\neg P \vee \neg A))) \Rightarrow$ $((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg A))))$	MP with 266, 271
273	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg A)))$	MP with 251, 272
274	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg(\neg P \vee \neg A)))$	reverse abbreviation and in 273 at occurrence 1
275	$((P \wedge (Q \vee A)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)))$	reverse abbreviation and in 274 at occurrence 1

□

The second distributive law (second direction):

Theorem 0.6.

$$(((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$$

Proof.

1	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	add sentence hilb36
2	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$	add sentence hilb7
3	$((P \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg P))$	replace Q by A in 2
4	$((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$	replace P by B in 3
5	$((B \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 4
6	$((P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow$ $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A)))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 5
7	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 1, 6
8	$(\neg\neg P \Rightarrow P)$	add sentence hilb6
9	$(\neg\neg B \Rightarrow B)$	replace P by B in 8
10	$(\neg\neg(Q \wedge A) \Rightarrow (Q \wedge A))$	replace B by $(Q \wedge A)$ in 9
11	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \vee P) \Rightarrow (A \vee Q)))$	add axiom axiom4
12	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee Q)))$	replace A by B in 11
13	$((P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee P) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace Q by C in 12
14	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \vee D) \Rightarrow (B \vee C)))$	replace P by D in 13
15	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee C)))$	replace B by P in 14
16	$((D \Rightarrow (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee D) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace C by $(Q \wedge A)$ in 15
17	$((\neg\neg(Q \wedge A) \Rightarrow (Q \wedge A)) \Rightarrow ((P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))))$	replace D by $\neg\neg(Q \wedge A)$ in 16
18	$((P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A)))$	MP with 10, 17
19	$((P \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg P))$	replace Q by B in 2
20	$((C \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C))$	replace P by C in 19
21	$((C \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(P \vee (Q \wedge A))$ in 20
22	$((P \vee \neg\neg(Q \wedge A)) \Rightarrow (P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	replace C by $(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 21
23	$(\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 18, 22
24	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q))$	add sentence defimp1
25	$((\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$	add sentence defimp2
26	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee C)))$	replace B by $\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 14
27	$((D \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	replace C by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 26

28	$\begin{aligned} & ((\neg(P \vee (Q \wedge A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \end{aligned}$	replace D by $\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in 27
29	$\begin{aligned} & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \end{aligned}$	MP with 23, 28
30	$(P \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg P \vee B)$	replace Q by B in 24
31	$(C \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \vee B)$	replace P by C in 30
32	$(C \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg C \vee \neg(P \vee (Q \wedge A)))$	replace B by $\neg(P \vee (Q \wedge A))$ in 31
33	$\begin{aligned} & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A)))) \end{aligned}$	replace C by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 32
34	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((A \Rightarrow P) \Rightarrow (A \Rightarrow Q))$	add sentence hilb1
35	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow Q))$	replace A by B in 34
36	$(P \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	replace Q by C in 35
37	$(D \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	replace P by D in 36
38	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \\ & (Q \wedge A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \\ & \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow C))) \end{aligned}$	replace B by $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A)))$ in 37
39	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \\ & \Rightarrow (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & D) \Rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace C by $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$ in 38
40	$\begin{aligned} & (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A)))$ in 39
41	$\begin{aligned} & (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	MP with 29, 40
42	$\begin{aligned} & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \end{aligned}$	MP with 33, 41
43	$(\neg P \vee B) \Rightarrow (P \Rightarrow B)$	replace Q by B in 25
44	$(\neg C \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	replace P by C in 43
45	$(\neg C \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	replace B by $\neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))$ in 44
46	$\begin{aligned} & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \end{aligned}$	replace C by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 45
47	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \\ & \Rightarrow (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & D) \Rightarrow ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace C by $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A)))$ in 38
48	$\begin{aligned} & (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \Rightarrow \\ & ((\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow \\ & (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))))) \end{aligned}$	replace D by $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$ in 47

49	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$ $((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	MP with 46, 48
50	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee (Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 42, 49
51	$(\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 7, 50
52	$(P \Rightarrow \neg\neg P)$	add sentence hilb5
53	$(A \Rightarrow \neg\neg A)$	replace P by A in 52
54	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q))$	replace A by $(P \vee Q)$ in 53
55	$((P \wedge Q) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q))$	add sentence defand1
56	$(\neg(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \wedge Q))$	add sentence defand2
57	$((B \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg B))$	replace A by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 4
58	$((\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow$ $\neg(P \vee Q)))$	replace B by $(P \vee Q)$ in 57
59	$(\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q))$	MP with 54, 58
60	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee C)))$	replace B by $\neg(P \vee A)$ in 14
61	$((D \Rightarrow \neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee$ $A) \vee \neg(P \vee Q))))$	replace C by $\neg(P \vee Q)$ in 60
62	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q)) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee$ $\neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))))$	replace D by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 61
63	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)))$	MP with 59, 62
64	$((P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P))$	add axiom axiom3
65	$((P \vee B) \Rightarrow (B \vee P))$	replace Q by B in 64
66	$((C \vee B) \Rightarrow (B \vee C))$	replace P by C in 65
67	$((C \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee C))$	replace B by $\neg(P \vee Q)$ in 66
68	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg(P \vee A)$ in 67
69	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))$ in 37
70	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee A) \vee$ $\neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 69
71	$((\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow$ $((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee$ $\neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee \neg(P \vee Q))$ in 70
72	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee$ $\neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 68, 71
73	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 63, 72
74	$((C \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee C))$	replace B by $\neg(P \vee A)$ in 66
75	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee$ $Q)))$	replace C by $\neg\neg\neg(P \vee Q)$ in 74
76	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 37
77	$((D \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 76
78	$((\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee$ $A))) \Rightarrow (((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee$ $\neg\neg\neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow$ $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $(\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))$ in 77

79	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee A) \vee \neg\neg\neg(P \vee Q))) \Rightarrow ((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	MP with 73, 78
80	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 75, 79
81	$((C \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 20
82	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 81
83	$(\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 80, 82
84	$((P \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg B))$	replace Q by B in 55
85	$((C \wedge B) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg B))$	replace P by C in 84
86	$((C \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg(P \vee A)))$	replace B by $(P \vee A)$ in 85
87	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $(P \vee Q)$ in 86
88	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow C))$	replace B by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 37
89	$((D \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 88
90	$((\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 89
91	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 83, 90
92	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 87, 91
93	$(\neg(\neg P \vee \neg B) \Rightarrow (P \wedge B))$	replace Q by B in 56
94	$(\neg(\neg C \vee \neg B) \Rightarrow (C \wedge B))$	replace P by C in 93
95	$(\neg(\neg C \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (C \wedge (P \vee A)))$	replace B by $(P \vee A)$ in 94
96	$(\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 95
97	$((D \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 88
98	$((\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace D by $\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 97
99	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 96, 98
100	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 92, 99
101	$((C \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 20
102	$((\neg\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 101
103	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 100, 102
104	$((C \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 20
105	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg\neg\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 104
106	$(\neg\neg\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg\neg\neg(\neg\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	MP with 103, 105

135	$((\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A)))) \Rightarrow$ $((\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))))))$	MP with 132, 134
136	$((\neg((P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))) \Rightarrow$ $(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))))$	MP with 131, 135
137	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg(Q \wedge A)))$	MP with 51, 136
138	$(B \Rightarrow \neg\neg B)$	replace P by B in 52
139	$((P \vee A) \Rightarrow \neg\neg(P \vee A))$	replace B by $(P \vee A)$ in 138
140	$((C \Rightarrow \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg\neg(P \vee A)$ in 20
141	$((\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow$ $\neg(P \vee A)))$	replace C by $(P \vee A)$ in 140
142	$(\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg(P \vee A))$	MP with 139, 141
143	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee$ $Q) \vee C)))$	replace B by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 14
144	$((D \Rightarrow \neg(P \vee A)) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee D) \Rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(P \vee A)$ in 143
145	$((\neg\neg(P \vee A) \Rightarrow \neg(P \vee A)) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))))$	replace D by $\neg\neg(P \vee A)$ in 144
146	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A)))$	MP with 142, 145
147	$((C \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee$ $Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 20
148	$((\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow$ $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))))$	replace C by $(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))$ in 147
149	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg\neg(P \vee A)))$	MP with 146, 148
150	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 86
151	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow$ $((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 37
152	$((D \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee$ $Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow$ $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))))))$	replace C by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))$ in 151
153	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee$ $\neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow$ $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee$ $A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))))))$	replace D by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee A))$ in 152
154	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee$ $A))) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee$ $Q) \vee \neg\neg(P \vee A)))$	MP with 149, 153
155	$((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee$ $A)))$	MP with 150, 154
156	$(\neg(\neg C \vee \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (C \wedge \neg\neg(P \vee A)))$	replace B by $\neg\neg(P \vee A)$ in 94
157	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge$ $\neg\neg(P \vee A)))$	replace C by $\neg\neg(P \vee Q)$ in 156
158	$((D \Rightarrow (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg\neg(P \vee$ $Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow$ $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A))))))$	replace C by $(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A))$ in 151

159	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))))$	replace D by $\neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))$ in 158
160	$(((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg\neg(P \vee Q) \vee \neg\neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))$	MP with 157, 159
161	$((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$	MP with 155, 160
162	$((C \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))$ in 20
163	$(((\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))))$	replace C by $(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 162
164	$(\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)))$	MP with 161, 163
165	$((C \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))$ in 20
166	$((\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))$	replace C by $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))$ in 165
167	$(\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$	MP with 164, 166
168	$((D \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee D) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))))$	replace C by $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))$ in 107
169	$((\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow ((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))))$	replace D by $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))$ in 168
170	$((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))))$	MP with 167, 169
171	$((C \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee C))$	replace B by $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))$ in 66
172	$((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))))$	replace C by $\neg(P \vee \neg(Q \wedge A))$ in 171
173	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$ in 37
174	$((D \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A)))) \Rightarrow (((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))))))$	replace C by $(\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A)))$ in 173
175	$(((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A)))) \Rightarrow (((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))) \Rightarrow ((\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg(Q \wedge A))))))$	replace D by $(\neg(P \vee \neg(Q \wedge A)) \vee \neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee A)))$ in 174

191	$((D \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))) \Rightarrow (((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))))$	replace C by $(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$ in 185
192	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))))$	replace D by $(\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$ in 191
193	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \vee \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow ((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	MP with 190, 192
194	$((\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))) \Rightarrow (\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A))))$	MP with 189, 193
195	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee A)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge A)))$	MP with 137, 194
196	$(\neg(\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg\neg(P \vee B)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(Q \wedge B)))$	replace A by B in 195
197	$(\neg(\neg\neg(P \vee C) \wedge \neg\neg(P \vee B)) \Rightarrow \neg(P \vee \neg\neg(C \wedge B)))$	replace Q by C in 196
198	$(\neg(\neg\neg(D \vee C) \wedge \neg\neg(D \vee B)) \Rightarrow \neg(D \vee \neg\neg(C \wedge B)))$	replace P by D in 197
199	$(\neg(\neg\neg(D \vee C) \wedge \neg\neg(D \vee \neg A)) \Rightarrow \neg(D \vee \neg\neg(C \wedge \neg A)))$	replace B by $\neg A$ in 198
200	$(\neg(\neg\neg(D \vee \neg Q) \wedge \neg\neg(D \vee \neg A)) \Rightarrow \neg(D \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace C by $\neg Q$ in 199
201	$(\neg(\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg\neg(\neg P \vee \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace D by $\neg P$ in 200
202	$(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg\neg(\neg P \vee \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	reverse abbreviation and in 201 at occurrence 1
203	$(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	reverse abbreviation and in 202 at occurrence 1
204	$(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	reverse abbreviation and in 203 at occurrence 1
205	$((P \vee Q) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q))$	add sentence hilb38
206	$((P \vee B) \Rightarrow \neg(\neg P \wedge \neg B))$	replace Q by B in 205
207	$((C \vee B) \Rightarrow \neg(\neg C \wedge \neg B))$	replace P by C in 206
208	$((C \vee (P \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg C \wedge \neg(P \wedge A)))$	replace B by $(P \wedge A)$ in 207
209	$((\neg\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)))$	replace C by $(P \wedge Q)$ in 208
210	$((C \Rightarrow \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))$ in 20
211	$((\neg\neg(((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))) \Rightarrow (\neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow \neg(((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))))$	replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))$ in 210
212	$(\neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)))$	MP with 209, 211
213	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee D) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee C)))$	replace B by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 14
214	$((D \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee D) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))))$	replace C by $\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))$ in 213
215	$((\neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee \neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))))$	replace D by $\neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))$ in 214
216	$((\neg\neg((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee \neg\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \vee \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))))$	MP with 212, 215

233	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow C)))$	replace B by $(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A))) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 37
234	$((D \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow (((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace C by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 233
235	$((\neg(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow (((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace D by $(\neg(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 234
236	$((\neg(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	MP with 230, 235
237	$((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	MP with 232, 236
238	$((\neg C \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (C \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace B by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 44
239	$((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))$ in 238
240	$((D \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow (((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 233
241	$((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow (((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	replace D by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 240
242	$((\neg(\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow ((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))))$	MP with 239, 241
243	$((\neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	MP with 237, 242
244	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge A) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 204, 243
245	$(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q))$	add sentence hilb39
246	$(\neg(\neg P \wedge \neg B) \Rightarrow (P \vee B))$	replace Q by B in 245
247	$(\neg(\neg C \wedge \neg B) \Rightarrow (C \vee B))$	replace P by C in 246
248	$(\neg(\neg C \wedge \neg A) \Rightarrow (C \vee A))$	replace B by A in 247
249	$(\neg(\neg Q \wedge \neg A) \Rightarrow (Q \vee A))$	replace C by Q in 248
250	$((C \Rightarrow (Q \vee A)) \Rightarrow (\neg(Q \vee A) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(Q \vee A)$ in 20
251	$((\neg(\neg Q \wedge \neg A) \Rightarrow (Q \vee A)) \Rightarrow (\neg(Q \vee A) \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace C by $\neg(\neg Q \wedge \neg A)$ in 250
252	$(\neg(Q \vee A) \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A))$	MP with 249, 251
253	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg P \vee C)))$	replace B by $\neg P$ in 14
254	$((D \Rightarrow \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow ((\neg P \vee D) \Rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace C by $\neg(\neg Q \wedge \neg A)$ in 253

255	$((\neg(Q \vee A) \Rightarrow \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow ((\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace D by $\neg(Q \vee A)$ in 254
256	$((\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	MP with 252, 255
257	$((C \Rightarrow (\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg C))$	replace B by $(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 20
258	$((\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	replace C by $(\neg P \vee \neg(Q \vee A))$ in 257
259	$(\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 256, 258
260	$((C \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg C \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace B by $\neg(\neg Q \wedge \neg A)$ in 85
261	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)))$	replace C by P in 260
262	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 37
263	$((D \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))))$	replace C by $(\neg P \vee \neg(Q \vee A))$ in 262
264	$((\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))))$	replace D by $(\neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(Q \vee A))$ in 263
265	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 259, 264
266	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)))$	MP with 261, 265
267	$(\neg(\neg C \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (C \wedge (Q \vee A)))$	replace B by $(Q \vee A)$ in 94
268	$(\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$	replace C by P in 267
269	$((D \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))))$	replace C by $(P \wedge (Q \vee A))$ in 262
270	$((\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))))$	replace D by $(\neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$ in 269
271	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg(Q \vee A))) \Rightarrow ((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$	MP with 268, 270
272	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$	MP with 266, 271
273	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee D) \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee C))$	replace B by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)))$ in 14
274	$((D \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow ((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee D) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))))$	replace C by $(P \wedge (Q \vee A))$ in 273
275	$((P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow ((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))))$	replace D by $(P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 274
276	$((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))))$	MP with 272, 275
277	$((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))))$	replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))$ in 231
278	$((D \Rightarrow C) \Rightarrow (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow C)))$	replace B by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))$ in 37
279	$((D \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow D) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))))$	replace C by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))$ in 278

280	$\begin{aligned} & (((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))))) \end{aligned}$	<p>replace D by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))$ in 279</p>
281	$\begin{aligned} & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))))) \end{aligned}$	<p>MP with 276, 280</p>
282	$\begin{aligned} & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))) \end{aligned}$	<p>MP with 277, 281</p>
283	$((\neg C \vee (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow (C \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))))$	<p>replace B by $(P \wedge (Q \vee A))$ in 44</p>
284	$\begin{aligned} & ((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))) \end{aligned}$	<p>replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A))$ in 283</p>
285	$\begin{aligned} & ((D \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & D) \Rightarrow (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A)))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))) \end{aligned}$	<p>replace C by $((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))$ in 278</p>
286	$\begin{aligned} & (((\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))))) \end{aligned}$	<p>replace D by $(\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))$ in 285</p>
287	$\begin{aligned} & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (\neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \vee (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))))) \end{aligned}$	<p>MP with 284, 286</p>
288	$\begin{aligned} & (((((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge \neg(\neg Q \wedge \neg A))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))) \Rightarrow \\ & (((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A))) \end{aligned}$	<p>MP with 282, 287</p>
289	$(((P \wedge Q) \vee (P \wedge A)) \Rightarrow (P \wedge (Q \vee A)))$	<p>MP with 244, 288</p>

□

This module used by the following modules:

Name: predtheo2
Version: 1.00.00
Rule version: 1.02.00
Orgin: [predtheo2_1.00.00_1.02.00.qedeq](#)
pdf: [predtheo2_1.00.00_1.02.00.pdf](#)

E-mail address: principa@meyling.com